INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA BÁSICA

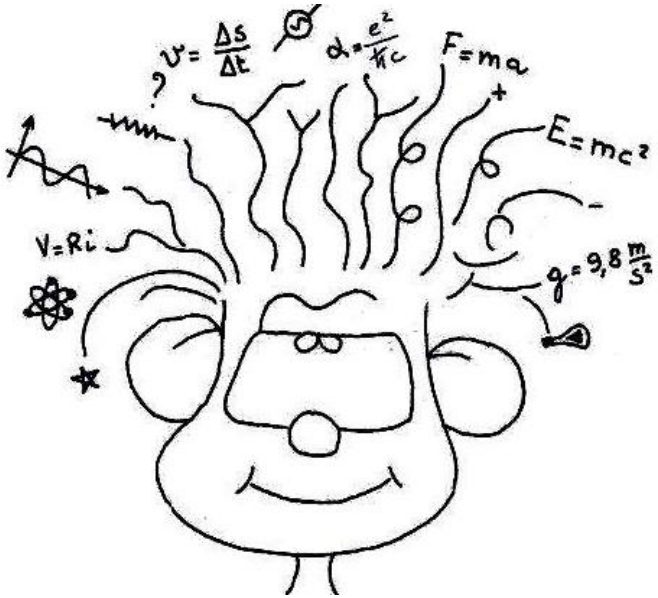
AULA 4

Dr. Pedro Giovâni da Silva (Ecologia UFC)
MSc. Juliano André Bogoni (Ecologia UFSC)

Florianópolis, agosto de 2015

Aula 4:

Wilcoxon-Mann-Whitney;
Kruskall-Wallis;
Wilcoxon;
Exercícios em Excel e em R



http://marcomello.casadosmorcegos.org

Qual teste estatístico devo usar?

por Marco Mello
(adaptado de
Jutta Schmid)

Qual é a distribuição dos meus dados?

variável independente qualitativa ou quantitativa

- 1 variável independente
  - Shapiro-Wilk[1]
  - Kolmogorov-Smirnov[1]
- >1 variável independente
  - qui-quadrado
  - teste G
  - teste exato de Fisher
  - teste binomial

1. Costumam ser usados para testar a normalidade dos dados.

Há uma relação entre as minhas variáveis?

variável independente nominal/ordinal, variável dependente quantitativa[3]

- 1 variável independente
  - 2 categorias
    - categorias independentes
      - distrib. normal: teste t
      - distrib. outra: Mann-Whitney
    - categorias ligadas
      - distrib. normal: teste t pareado
      - distrib. outra: Wilcoxon
  - >2 categorias
    - categorias independentes
      - distrib. normal: ANOVA unifatorial
      - distrib. outra: Kruskal-Wallis
    - categorias ligadas
      - distrib. normal: ANOVA de medidas repetidas
      - distrib. outra: Friedman
- >1 variável independente
  - ANOVA multifatorial
  - GLM ou GLzM[2]

2. Pode-se usar esses modelos quando há mistura de variáveis independentes quantitativas e qualitativas.

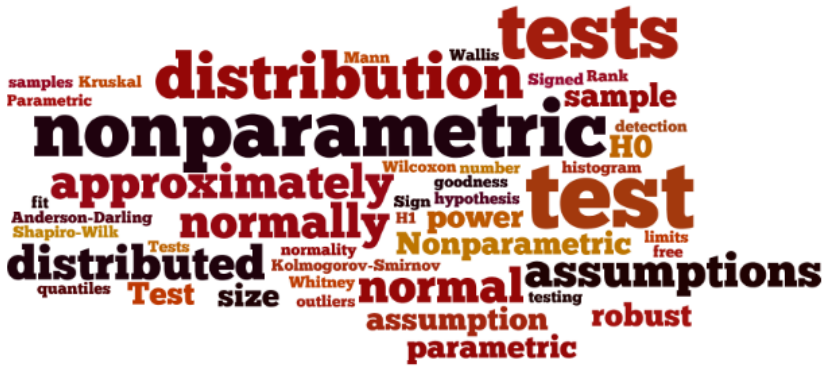
todas as variáveis quantitativas[3]

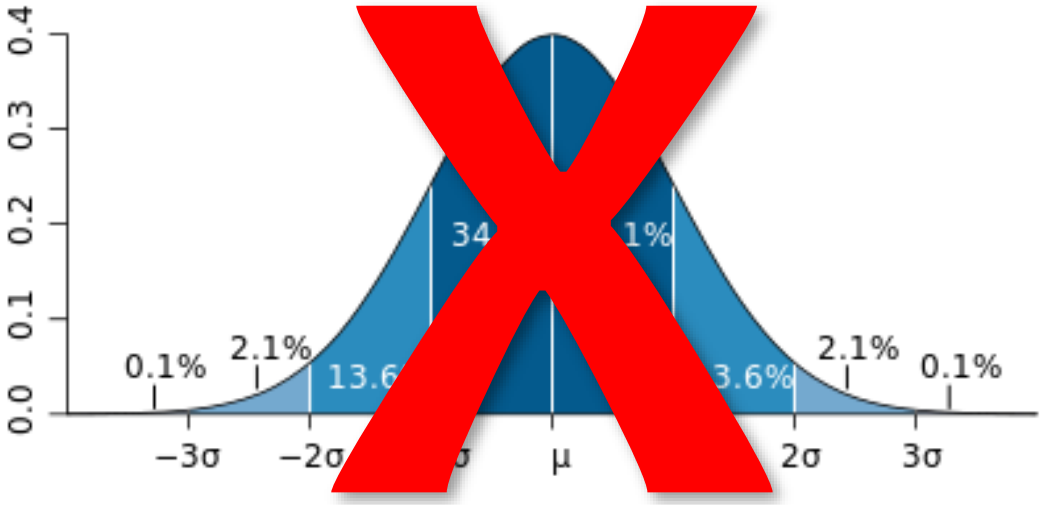
- 1 variável independente
  - sem causalidade
    - distrib. normal: correlação de Pearson
    - distrib. outra: correlação de Spearman
  - com causalidade
    - distrib. normal: regressão linear/não-linear simples
    - distrib. outra: regressão não-paramétrica
- >1 variável independente
  - correlação parcial/múltipla
  - correlação de Kendall
  - regressão múltipla/stepwise
  - análise de caminhos

3. Se a a variável independente for quantitativa, mas a variável dependente for nominal e binária (e.g., sim ou não), você pode usar uma regressão logística.

Teste não paramétricos

- Métodos de distribuição livre, que não dependem de suposições extraídas dos dados fornecidos por uma distribuição normal de probabilidade. É o oposto de estatística paramétrica. Inclui estatística descritiva, modelos estatísticos, inferência estatística e testes de hipóteses não paramétricos.





Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

É aplicado em situações em que se tem um par de amostras independentes e se quer testar se as populações que deram origem a essas amostras podem ser consideradas semelhantes ou não.

O teste de Wilcoxon-Mann-Whitney é baseado nos postos (ranques) dos valores obtidos combinando-se as duas amostras. Isso é feito ordenando-se esses valores, do menor para o maior, independentemente do fato de qual população cada valor provém.

O teste U pode ser considerado a versão não-paramétrica do teste t de Student, para amostras independentes.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

A estatística U, que é a base para a decisão sobre aceitação ou não da hipótese de nulidade, é calculada da seguinte maneira:

1. É formado um conjunto com os dados das amostras A e B
2. O conjunto é ordenado de forma crescente
3. Anota-se a ordem de cada elemento deste conjunto
4. Separam-se novamente as amostras A e B
5. O valor de U é a soma das ordens (ranques) da amostra com menor U

Havendo empate nos valores, o ranque será a média da soma dos ranques.

Quanto menor o valor de U, maior a evidência de que as populações são diferentes.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

Por exemplo:

Consideremos duas populações P1 e P2 das quais não temos informações a respeito de suas distribuições, mas as variáveis envolvidas tenham uma escala de medida pelo menos ordinal.

Ou seja, podemos abordar o caso de variáveis aleatórias qualitativas ordinais ou quantitativas. Consideremos também duas amostras independentes das duas populações.

Queremos testar se as distribuições são iguais em localização, isto é, estaremos interessados em saber se uma população tende a ter valores maiores do que a outra, ou se elas têm a mesma mediana. O teste utilizado será o teste U.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

No caso de termos uma variável aleatória qualitativa ordinal, comumente associamos números às diversas categorias (ou classes, ou atributos), segundo as quais a variável é classificada. Por exemplo, podemos ter 1 para bom, 2 para muito bom e 3 para ótimo. Vemos, então, que esses valores são postos. Neste caso e em outras situações é preferível trabalhar com postos do que com valores arbitrários associados à variável qualitativa.

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 = n_1 n_2 - U_1$$

U_1 e U_2 = Estatística U
n_1 e n_2 = número de dados em cada amostra
R_1 e R_2 = soma dos ranques de cada amostra

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

Por exemplo:

Duas amostras forneceram os seguintes valores de certa variável.

Amostra 1:

29	39	60	78	82	112	125	170
192	224	263	275	276	286	369	756

Amostra 2:

126	142	156	228	245	246
370	419	433	454	478	503

Será que há diferenças entre as amostras?

Primeiro passo: Juntar e ranquear todos os valores.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

Temos na Tabela (2.1) todos os valores amostrais em ordem crescente e os postos associados. Para facilitar a identificação, valores e postos da segunda amostra foram sublinhados.

Valor	29	39	60	78	82	112	125	126	142	156
Posto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor	170	192	224	228	245	246	263	275	276	286
Posto	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Valor	369	370	419	433	454	478	503	756		
Posto	21	22	23	24	25	26	27	28		

Tabela 2.1: Postos combinados para as duas amostras independentes.

$$R_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 11 + 12 + 13 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 28 = 187$$
$$R_2 = 8 + 9 + 10 + 14 + 15 + 16 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 = 219$$

$$U_1 = (16 * 12) + (16 * 17)/2 - 187 = 141$$
$$U_2 = (16 * 12) - 141 = 51$$

Havendo empate nos valores, o ranque será a média da soma dos ranques.

$$U_{calc} = 51 \quad < \quad U_{0.05;12;16} = 53$$

H0 é rejeitada se o menor valor de U entre as amostras for menor ou igual ao valor crítico tabelado.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U)

Valores críticos - Teste de Mann-Whitney

For two-tailed test. 5% significance level.

N_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N_1																
2				0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	9	10	11	11	12	13	14
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	.	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	.	.	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	.	.	.	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	.	.	.	.	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	.	.	.	.	.	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	.	.	.	.	.	.	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	.	.	.	.	.	.	.	37	41	45	49	$\boxed{53}$	57	61	65	69
13	.	.	.	.	.	.	.	.	45	50	54	59	63	67	72	76
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55	59	64	69	74	78	83
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	64	70	75	80	85	90
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	81	86	92	98
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	87	93	99	105
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99	106	112
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	113	119
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	127

$U_{calc} = 51 \quad < \quad U_{0.05;12;16} = 53$

H0 é rejeitada se o menor valor de U entre as amostras for menor ou igual ao valor crítico tabelado.

Mesmo exemplo no Excel... Exercício 1

	A	B
1	Amostra 1	Amostra 2
2	29	126
3	39	142
4	60	156
5	78	228
6	82	245
7	112	246
8	125	370
9	170	419
10	192	433
11	224	454
12	263	478
13	275	503
14	276	
15	286	
16	369	
17	756	
18		

	A	B
1	Amostra 1	Amostra 2
2	29	126
3	39	142
4	60	156
5	78	228
6	82	245
7	112	246
8	125	370
9	170	419
10	192	433
11	224	454
12	263	478
13	275	503
14	276	
15	286	
16	369	
17	756	
18		

D	E
Ordenar	Ranquear
29	1
39	2
60	3
78	4
82	5
112	6
125	7
126	8
142	9
156	10
170	11
192	12
224	13
228	14
245	15
246	16
263	17
275	18
276	19
286	20
369	21
370	22
419	23
433	24
454	25
478	26
503	27
756	28

G	H
Amotra 1	Amotra 2
1	8
2	9
3	10
4	14
5	15
6	16
7	22
11	23
12	24
13	25
17	26
18	27
19	
20	
21	
28	

Mesmo exemplo no Excel... Exercício 1

G	H
Amotra 1	Amotra 2
1	8
2	9
3	10
4	14
5	15
6	16
7	22
11	23
12	24
13	25
17	26
18	27
19	
20	
21	
28	

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = n_1 n_2 - U_1$$

	Soma	n
Am1	187	16
Am2	219	12

	U
Am1	141
Am2	51

$U_{calc} = 51 < U_{0.05;12;16} = 53$

fx =(L2*L3)+(L2*(L2+1)/2)-K2

fx =L2*L3-K6

Conclui-se que a amostra 1 difere da amostra 2.

Mesmo exemplo no R... Exercício 1

G	H
Amotra 1	Amotra 2
1	8
2	9
3	10
4	14
5	15
6	16
7	22
11	23
12	24
13	25
17	26
18	27
19	
20	
21	
28	

```
> Amostra1 <- c(29,39,60,78,82,112,125,170,192,224,263,275,276,286,369,756)
> Amostra2 <- c(126,142,156,228,245,246,370,419,433,454,478,503)
>
> wilcox.test(Amostra1, Amostra2, paired=FALSE, alternative="two.sided")

        Wilcoxon rank sum test

data:  Amostra1 and Amostra2
W = 51, p-value = 0.03734
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Conclui-se que a amostra 1 difere da amostra 2.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 2

O diretor de recursos humanos de uma empresa crê que os operadores de um call-center com treino de competências sociais, deixam uma impressão mais favorável nos clientes do que os operadores sem este tipo de treino. Num grupo de 22 operadores, foi avaliado a impressão de simpatia registada por 22 clientes após uma chamada de controle. O grau de simpatia, avaliado numa escala ordinal com 5 pontos (1 – nada simpático, a 5 – muito simpático) para cada operador é registado na tabela seguinte. Existe diferença entre as amostras?

Grau de Simpatia (1– Nada simpático; 2 – Pouco simpático; 3 – Nem simpático nem antipático; 4 – Simpático; 5 – Muito simpático)	
Grupo de controlo	Grupo com treino de competências sociais
1	2
2	4
3	3
3	3
2	3
4	5
3	4
3	3
3	3
2	4
3	
2	

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = n_1 n_2 - U_1$$

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 2

$$U_{calc} = 30.5 \quad < \quad U_{0.05;10;12} = 29 \text{ ???}$$

N_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N_1																
2				0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	9	10	11	11	12	13	14
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	.	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	.	.	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	.	.	.	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	.	.	.	.	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	.	.	.	.	.	23	26	$\boxed{29}$	33	36	39	42	45	48	52	55
11	.	.	.	.	.	.	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	.	.	.	.	.	.	.	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	.	.	.	.	.	.	.	.	45	50	54	59	63	67	72	76
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55	59	64	69	74	78	83
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	64	70	75	80	85	90
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	81	86	92	98
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	87	93	99	105
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99	106	112
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	113	119
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	127

```
> con <- c(1,2,3,3,2,4,3,3,3,2,3,2)
> tre <- c(2,4,3,3,3,5,4,3,3,4)
>
> wilcox.test(con, tre, paired=FALSE, alternative="two.sided")

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  con and tre
W = 30.5, p-value = 0.03908
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 2

Quando há muitos empates (caso do exercício 2), e ambas as amostras tem tamanhos iguais ou superiores a 10, pode fazer-se a aproximação à função de distribuição normal, com parâmetros:

- Valor esperado: $\mu_U = \frac{N_1.N_2}{2}$

- Variância: $\sigma_U^2 = \frac{N_1.N_2.(N_1+N_2+1)}{12}$

Se existem "empates" ou "ties" nos números de ordem, deve fazer-se uma correcção no cálculo da variância; sendo u_i os números de números de ordem "empatados", a expressão para cálculo da variância deve ser:

- Variância: $\sigma_U^2 = \frac{N_1.N_2}{12} \times \frac{N^3 - N - \sum(u_i^3 - u_i)}{N^2 - N}$

A estatística de teste é então:

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sqrt{\sigma_U^2}} \sim \mathbf{N}(0,1)$$

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 2

Efetuando a correção no Exercício 2 quanto aos empates:

Corrigindo para empates

μ	60
soma	1500
σ	197.5325
Z	-2.09895
P	

=SOMA(5^3-5;11^3-11;4^3-4)

- Valor esperado: $\mu_U = \frac{N_1.N_2}{2}$
- Variância: $\sigma_U^2 = \frac{N_1.N_2}{12} \times \frac{N^3 - N - \sum(u_i^3 - u_i)}{N^2 - N}$

A estatística de teste é então:

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sqrt{\sigma_U^2}} \sim \mathbf{N}(0,1)$$

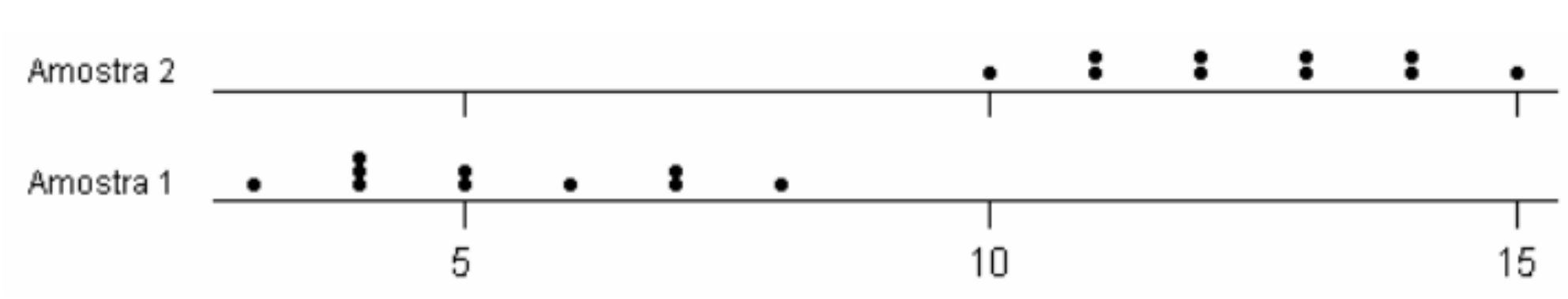
Para um nível de significância $\alpha = 5\%$, e tratando-se de um teste bilateral, o quantil crítico da distribuição normal $\mathbf{N}(0,1)$ é $\mathbb{Z}_{0.05} = \pm 1.96$, pelo que se conclui que se deve rejeitar a hipótese nula.

A área sob a curva associada ao valor de z é de 2*0.4817 - 1 = 0.03

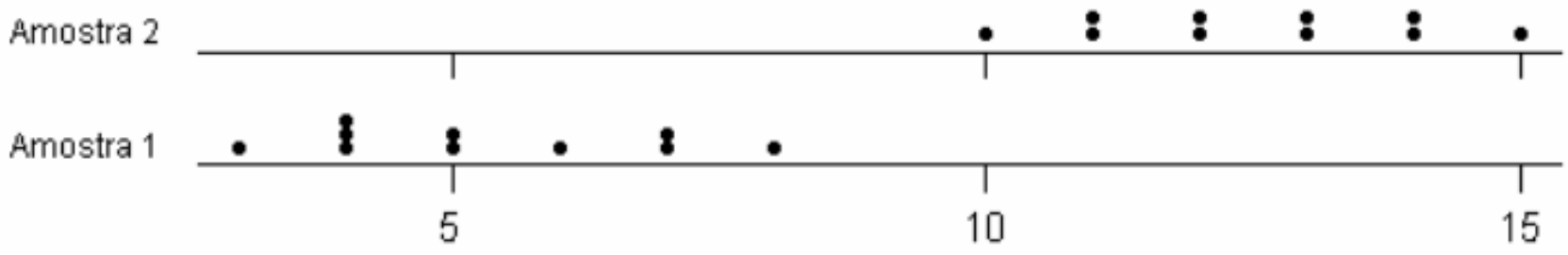
```
> con <- c(1,2,3,3,2,4,3,3,3,2,3,2)
> tre <- c(2,4,3,3,3,5,4,3,3,4)
>
> wilcox.test(con, tre, paired=FALSE, alternative="two.sided")

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  con and tre
W = 30.5, p-value = 0.03908
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 3

Consideremos as duas amostras abaixo representadas graficamente; a partir deste gráfico é possível estabelecer os números de ordem (não interessam os valores x, mas sim a ordem ou lugar que cada observação ocupa) de cada uma das amostras (cada ponto representa uma observação). É possível supor que existe diferença estatística entre as amostras? Para confirmar, vamos testar...



Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 3



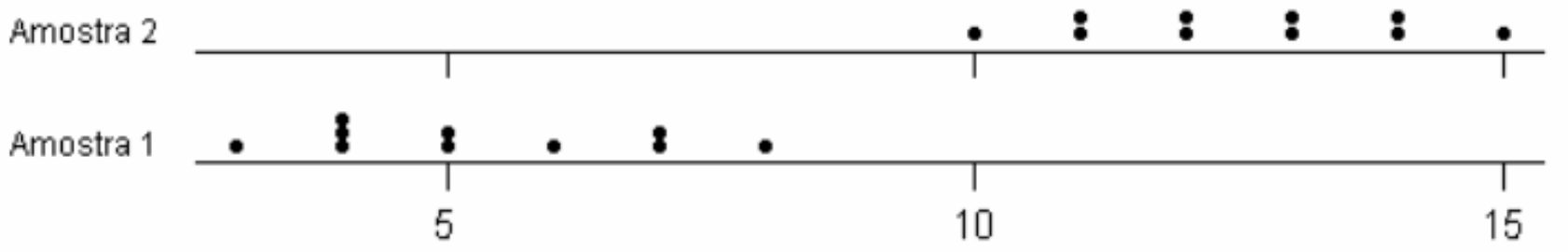
N_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N_1																
2				0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	9	10	11	11	12	13	14
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	.	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	.	.	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	.	.	.	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	.	.	.	.	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	.	.	.	.	.	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	.	.	.	.	.	.	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	.	.	.	.	.	.	.	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	.	.	.	.	.	.	.	.	45	50	54	59	63	67	72	76
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55	59	64	69	74	78	83
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	64	70	75	80	85	90
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	81	86	92	98
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	87	93	99	105
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99	106	112
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	113	119
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	127

	Amostra 1	Amostra 2
	1	11
	3	12.5
	3	12.5
	3	14.5
	5.5	14.5
	5.5	16.5
	7	16.5
	8.5	18.5
	8.5	18.5
	10	20
soma	55	155
n	10	10

U =	101	0

$U_{calc} = 0 \quad < \quad U_{0.05;10;10} = 23$

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 3



N_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N_1																
2				0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	9	10	11	11	12	13	14
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	.	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	.	.	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	.	.	.	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	.	.	.	.	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	.	.	.	.	.	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	.	.	.	.	.	.	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	.	.	.	.	.	.	.	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	.	.	.	.	.	.	.	.	45	50	54	59	63	67	72	76
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55	59	64	69	74	78	83
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	64	70	75	80	85	90
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	81	86	92	98
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	87	93	99	105
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99	106	112
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	113	119
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	127

```
> Am1 <- c(1,3,3,3,5.5,5.5,7,8.5,8.5,10)
> Am2 <- c(11,12.5,12.5,14.5,14.5,16.5,16.5,18.5,18.5,20)
>
> wilcox.test(Am1, Am2, paired=FALSE, alternative="two.sided")

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  Am1 and Am2
W = 0, p-value = 0.0001727
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 4

Mattos (1994) estudou a morfologia das regiões organizadoras do nucléolo (RON) em células da cérvice uterina de mulheres com neoplasias cervicais e de mulheres sem esta característica (controles). De cada uma delas, foram examinadas 100 células e computou-se um escore (porcentagem observada) para cada padrão morfológico. No padrão 1A, as RONs apresentavam-se como manchas sólidas, redondas e de tamanhos diferentes. Há diferenças entre mulheres com neoplasias e controle?

Escore 1A (porcentagem de células tipo 1A) em 9 controle s e 8 pacientes com carcinoma invasor.

Controles			Com carcinoma		
Pac. Nº	Escore 1A	Posto	Pac. Nº	Escore 1A	Posto
1	7		10	0	
2	8		11	0	
3	12		12	1	
4	13		13	2	
5	20		14	6	
6	23		15	8	
7	25		16	14	
8	34		17	19	
9	36				

Há dados iguais: o ranque será a média da soma dos ranques.

Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (teste U) - Exercício 4

Valores críticos - Teste de Mann-Whitney

For two-tailed test. 5% significance level.

N_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N_1																
2				0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	9	10	11	11	12	13	14
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	.	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	.	.	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	.	.	.	13	$\boxed{15}$	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	.	.	.	.	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	.	.	.	.	.	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	.	.	.	.	.	.	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	.	.	.	.	.	.	.	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	.	.	.	.	.	.	.	.	45	50	54	59	63	67	72	76
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55	59	64	69	74	78	83
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	64	70	75	80	85	90
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	81	86	92	98
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	87	93	99	105
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99	106	112
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	113	119
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	127

	Soma	n
am1	107.5	9
am2	45.5	8

	U
am1	62.5
am2	9.5

$U_{calc} = 9.5 < U_{0.05;8;9} = 15$

Conclui-se que a população com carcinoma difere da população controle quanto ao escore 1A.

Teste pareado de Wilcoxon

Teste pareado de Wilcoxon

Substitui o teste t de Student para amostras pareadas quando os dados não satisfazem as exigências deste último. Foi também desenvolvido por E. Wilcoxon em 1945 e baseia-se nos postos das diferenças intrapares, dando maior importância às diferenças maiores.

A ideia que norteia o teste é a de que se o tratamento A produz valores maiores do que o tratamento B, as diferenças (A – B) de sinal positivo serão em maior número e grau do que as diferenças de sinal negativo.

Se ambos os tratamentos têm o mesmo efeito, as diferenças positivas e negativas devem se anular.

Teste pareado de Wilcoxon

Este teste pressupõe que:

1. Os dados são dependentes dentro do par (isto é, pareados), mas são independentes entre pares.

2. A variável foi medida no mínimo em uma escala de intervalo. No entanto, este teste é também usado para dados medidos em uma escala ordinal.

3. As diferenças intrapares constituem uma variável contínua, de distribuição simétrica ao redor da mediana.

Teste pareado de Wilcoxon

Passo a passo:

1. Calcular a diferença entre as amostras pareadas, conservando o sinal.

2. Ranquear os valores de diferença ignorando os valores negativos (mas mantendo o sinal).

3. Calcular a soma total dos ranques, do valores positivos e dos valores negativos.

Rejeita-se H0 se T_{calc} (menor valor absoluto) for menor ou igual ao T crítico tabelado

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 5

Um pesquisador mediu a colinesterase sérica em agricultores que aplicaram inseticida em plantas de interesse comercial. Foram feitas duas coletas de sangue em cada pessoa: uma antes da aplicação do inseticida e outra 24 h após. O que pode ser afirmado quanto ao efeito da exposição ao inseticida sobre o nível de colinesterase no sangue desses agricultores?

A hipótese nula que se deseja testar é:

H0: o nível de colinesterase é o mesmo antes e após a aplicação do inseticida.

Rejeita-se H0 se T_{calc} (menor valor absoluto) for menor ou igual ao T crítico tabelado

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 5

Um pesquisador mediu a colinesterase sérica em agricultores que aplicaram inseticida em plantas de interesse comercial. Foram feitas duas coletas de sangue em cada pessoa: uma antes da aplicação do inseticida e outra 24 h após. O que pode ser afirmado quanto ao efeito da exposição ao inseticida sobre o nível de colinesterase no sangue desses agricultores?

Colinesterase total (micromol/mL de plasma) em 17 agricultores do sexo masculino: dosagens antes e após uma sessão de aplicação de inseticidas em plantas.

Indiv.	Antes (A)	Depois (D)
1	8.3	6.84
2	6.7	5.98
3	7.8	7.1
4	9.3	8.38
5	6.5	6.07
6	10.5	10.22
7	6.9	5.87
8	7.5	7.28
9	6.6	6.15
10	6.7	6.26
11	7.5	7.46
12	7.4	7.69
13	8.1	7.95
14	8.8	9.15
15	7.6	7.56
16	9.4	9.07
17	7.2	6.78

Valores críticos para o teste pareado de Wilcoxon

n	α Bilateral α Unilateral	0.50 0.25	0.20 0.10	0.10 0.05	0.05 0.025	0.02 0.01	0.01 0.005	0.005 0.0025	0.001 0.0005
4		2	0						
5		4	2	0					
6		6	3	2	0				
7		9	5	3	2	0			
8		12	8	5	3	1	0		
9		16	10	8	5	3	1	0	
10		20	14	10	8	5	3	1	
11		24	17	13	10	7	5	3	0
12		29	21	17	13	9	7	5	1
13		35	26	21	17	12	9	7	2
14		40	31	25	21	15	12	9	4
15		47	36	30	25	19	15	12	6
16		54	42	35	29	23	19	15	8
17		61	48	41	34	27	23	19	11
18		69	55	47	40	32	27	23	14
19		77	62	53	46	37	32	27	18
20		86	69	60	52	43	37	32	21
21		95	77	67	58	49	42	37	25
22		104	86	75	65	55	48	42	30
23		114	94	83	73	62	54	48	35
24		125	104	91	81	69	61	54	40
25		136	113	100	89	76	68	60	45
26		148	124	110	98	84	75	67	51
27		160	134	119	107	92	83	74	57
28		172	145	130	116	101	91	82	64
29		185	157	140	126	110	100	90	71
30		198	169	151	137	120	109	98	78
31		212	181	163	147	130	118	107	86
32		226	194	175	159	140	128	116	94
33		241	207	187	170	151	138	126	102
34		257	221	200	182	162	148	136	111
35		272	235	213	195	173	159	145	120
36		289	250	227	208	185	171	157	130
37		305	265	241	221	198	182	168	140
38		323	281	256	235	211	194	180	150
39		340	297	271	249	224	207	192	161
40		358	313	286	264	238	220	204	172
41		377	330	302	279	252	233	217	183
42		396	348	319	294	266	247	230	195
43		416	365	336	310	281	261	244	207
44		436	384	353	327	296	276	258	220
45		456	402	371	343	312	291	272	233
46		477	422	389	361	328	307	287	246
47		499	441	407	378	345	322	302	260
48		521	462	426	396	362	339	318	274
49		543	482	446	415	379	355	334	289
50		566	503	466	434	397	373	350	304
51		590	525	486	453	416	390	367	319
52		613	547	507	473	434	408	384	335
53		638	569	529	494	454	427	402	351
54		668	592	550	514	473	445	420	368
55		688	615	573	536	493	465	438	385
56		714	639	595	557	514	484	457	402
57		740	664	618	579	535	504	477	420
58		767	688	642	602	556	525	497	438
59		794	714	666	625	578	546	517	457
60		822	739	690	648	600	567	537	476

n	α Bilateral α Unilateral	0,50 0,25	0,20 0,10	0,10 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01	0,01 0,005	0,005 0,0025	0,001 0,0005
61		850	765	715	672	623	598	558	495
62		879	792	741	697	646	611	580	515
63		908	819	767	721	669	634	602	535
64		938	847	793	747	693	657	624	556
65		968	875	820	772	718	681	647	577
66		998	903	847	798	742	705	670	599
67		1029	932	875	825	768	729	694	621
68		1061	962	903	852	793	754	718	643
69		1093	992	931	879	819	779	742	666
70		1126	1022	960	907	846	805	767	689
71		1159	1053	990	936	873	831	792	712
72		1192	1084	1020	964	901	858	818	736
73		1226	1116	1050	994	928	884	844	761
74		1261	1148	1081	1023	957	912	871	786
75		1296	1181	1112	1053	986	940	898	811
76		1331	1214	1144	1084	1015	968	925	836
77		1367	1247	1176	1115	1044	997	953	862
78		1403	1282	1209	1147	1075	1026	981	889
79		1440	1316	1242	1179	1105	1056	1010	916
80		1478	1351	1276	1211	1136	1086	1039	943
81		1516	1387	1310	1244	1168	1116	1069	971
82		1554	1423	1345	1277	1200	1147	1099	999
83		1593	1459	1380	1311	1232	1178	1129	1028
84		1632	1496	1415	1345	1265	1210	1160	1057
85		1672	1533	1451	1380	1298	1242	1191	1086
86		1712	1571	1487	1415	1332	1275	1223	1116
87		1753	1609	1524	1451	1366	1308	1255	1146
88		1794	1648	1561	1487	1400	1342	1288	1177
89		1836	1688	1599	1523	1435	1376	1321	1208
90		1878	1727	1638	1560	1471	1410	1355	1240
91		1921	1767	1676	1597	1507	1445	1389	1271
92		1964	1808	1715	1635	1543	1480	1423	1304
93		2008	1849	1755	1674	1580	1516	1458	1337
94		2052	1891	1795	1712	1617	1552	1493	1370
95		2097	1933	1836	1752	1655	1589	1529	1404
96		2142	1976	1877	1791	1693	1626	1565	1438
97		2187	2019	1918	1832	1731	1664	1601	1472
98		2233	2062	1960	1872	1770	1702	1638	1507
99		2280	2106	2003	1913	1810	1740	1676	1543
100		2327	2151	2045	1955	1850	1779	1714	1578

Fonte: Zar, 1999, pp. 101-102 (modificada).

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 5

Colinesterase total (micromol/mL de plasma) em 17 agricultores do sexo masculino: dosagens antes e após uma sessão de aplicação de inseticidas em plantas.

Indiv.	Antes (A)	Depois (D)	d = A - D	Posto
1	8.3	6.84	1.46	17
2	6.7	5.98	0.72	14
3	7.8	7.1	0.7	13
4	9.3	8.38	0.92	15
5	6.5	6.07	0.43	10
6	10.5	10.22	0.28	5
7	6.9	5.87	1.03	16
8	7.5	7.28	0.22	4
9	6.6	6.15	0.45	12
10	6.7	6.26	0.44	11
11	7.5	7.46	0.04	1.5
12	7.4	7.69	-0.29	-6
13	8.1	7.95	0.15	3
14	8.8	9.15	-0.35	-8
15	7.6	7.56	0.04	1.5
16	9.4	9.07	0.33	7
17	7.2	6.78	0.42	9
mediana	**7.5**	**7.28**		
n =	**17**			

Soma postos	**153**
Soma positivos (T+)	**139**
Soma negativos (T-)	**-14**

$$T_{calc} = |-14| = 14$$

$$T_{calc} = 14 \quad < \quad T_{0.05;17} = 34$$

```
> wilcox.test(antes, depois, paired=TRUE, alternative="two.sided")

        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  antes and depois
V = 139, p-value = 0.003331
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Conclui-se que houve uma diminuição significativa nos níveis de colinesterase sérica após a exposição ao inseticida (mediana antes da aplicação = 7.50 micrmol/mL); mediana após a aplicação = 7.28 micromol/mL).

Valores críticos para o teste pareado de Wilcoxon

n	α Bilateral α Unilateral	0.50 0.25	0.20 0.10	0.10 0.05	0.05 0.025	0.02 0.01	0.01 0.005	0.005 0.0025	0.001 0.0005
4		2	0						
5		4	2	0					
6		6	3	2	0				
7		9	5	3	2	0			
8		12	8	5	3	1	0		
9		16	10	8	5	3	1	0	
10		20	14	10	8	5	3	1	
11		24	17	13	10	7	5	3	0
12		29	21	17	13	9	7	5	1
13		35	26	21	17	12	9	7	2
14		40	31	25	21	15	12	9	4
15		47	36	30	25	19	15	12	6
16		54	42	35	[illegible]	23	19	15	8
17		61	48	41	34	27	23	19	11
18		69	55	47	40	32	27	23	14
19		77	62	53	46	37	32	27	18
20		86	69	60	52	43	37	32	21
21		95	77	67	58	49	42	37	25
22		104	86	75	65	55	48	42	30
23		114	94	83	73	62	54	48	35
24		125	104	91	81	69	61	54	40
25		136	113	100	89	76	68	60	45
26		148	124	110	98	84	75	67	51
27		160	134	119	107	92	83	74	57
28		172	145	130	116	101	91	82	64
29		185	157	140	126	110	100	90	71
30		198	169	151	137	120	109	98	78

Teste pareado de Wilcoxon

Quando o número de diferenças n for superior a 25, a distribuição deste teste aproxima-se de uma distribuição normal e o teste de significância pode ser feito usando-se essa distribuição.

A fórmula para testar a significância da estatística T de Wilcoxon por meio da distribuição normal é a seguinte:

$$Z_{calc} = \frac{\left| T - \frac{n(n+1)}{4} \right|}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \frac{CE}{2}}{24}}}$$

CE = correção a ser usada se houver empates; não havendo empates, CE = 0. Esta correção é $CE = \Sigma(t^3 - t)$, onde t é o número de empates por posto.

Teste pareado de Wilcoxon

Exemplo:

Uma médica mediu a pressão arterial sistólica de 96 recém-nascidos em dois momentos: quando tinham entre 12-24 h (A) e quando tinham 24-48 h (B) de vida. Deseja-se testar a hipótese de que a pressão arterial sistólica apresenta valores diferentes nesses dois momentos. Usando $\alpha = 0.001$.

Os dados foram analisados por um programa de computador, que forneceu os seguintes resultados:

Diferenças iguais a zero = 6

Soma das diferenças positivas T+ = 73

Soma das diferenças negativas T- = -17

z = 5.23 (P = 0.000)

Mediana momento A = 67.0

Mediana momento B = 70.5

Para se realizar o teste usando diretamente a tabela de valores críticos de Wilcoxon, determina-se primeiro que $T_{calc} = 17$, pois $|-17| < |+73|$.

Retirando as diferenças iguais a zero, resulta n = 96 – 6 = 90.

Então o valor crítico para $\alpha = 0.001$ é $T_{0.001;90} = 1240$. Logo, $T_{calc} = 17 < T_{0.001;90} = 1240$.

Conclui-se que os níveis de pressão arterial sistólica diferem nos dois momentos, sendo mais elevado após 24 h a contar do nascimento.

Teste pareado de Wilcoxon

$\alpha = 0.001$ é $T_{0.001;90} = 1240$.
Logo, $T_{calc} = 17 < T_{0.001;90} = 1240$.

n	α Bilateral / α Unilateral	0,50 / 0,25	0,20 / 0,10	0,10 / 0,05	0,05 / 0,025	0,02 / 0,01	0,01 / 0,005	0,005 / 0,0025	0,001 / 0,0005
61		850	765	715	672	623	598	558	495
62		879	792	741	697	646	611	580	515
63		908	819	767	721	669	634	602	535
64		938	847	793	747	693	657	624	556
65		968	875	820	772	718	681	647	577
66		998	903	847	798	742	705	670	599
67		1029	932	875	825	768	729	694	621
68		1061	962	903	852	793	754	718	643
69		1093	992	931	879	819	779	742	666
70		1126	1022	960	907	846	805	767	689
71		1159	1053	990	936	873	831	792	712
72		1192	1084	1020	964	901	858	818	736
73		1226	1116	1050	994	928	884	844	761
74		1261	1148	1081	1023	957	912	871	786
75		1296	1181	1112	1053	986	940	898	811
76		1331	1214	1144	1084	1015	968	925	836
77		1367	1247	1176	1115	1044	997	953	862
78		1403	1282	1209	1147	1075	1026	981	889
79		1440	1316	1242	1179	1105	1056	1010	916
80		1478	1351	1276	1211	1136	1086	1039	943
81		1516	1387	1310	1244	1168	1116	1069	971
82		1554	1423	1345	1277	1200	1147	1099	999
83		1593	1459	1380	1311	1232	1178	1129	1028
84		1632	1496	1415	1345	1265	1210	1160	1057
85		1672	1533	1451	1380	1298	1242	1191	1086
86		1712	1571	1487	1415	1332	1275	1223	1116
87		1753	1609	1524	1451	1366	1308	1255	1146
88		1794	1648	1561	1487	1400	1342	1288	1177
89		1836	1688	1599	1523	1435	1376	1321	[illegible]
90		1878	1727	1638	1560	1471	1410	1355	1240
91		1921	1767	1676	1597	1507	1445	1389	1271
92		1964	1808	1715	1635	1543	1480	1423	1304
93		2008	1849	1755	1674	1580	1516	1458	1337
94		2052	1891	1795	1712	1617	1552	1493	1370
95		2097	1933	1836	1752	1655	1589	1529	1404
96		2142	1976	1877	1791	1693	1626	1565	1438
97		2187	2019	1918	1832	1731	1664	1601	1472
98		2233	2062	1960	1872	1770	1702	1638	1507
99		2280	2106	2003	1913	1810	1740	1676	1543
100		2327	2151	2045	1955	1850	1779	1714	1578

Fonte: Zar, 1999, ap. 101-102 (modificada).

Teste pareado de Wilcoxon

Exemplo:

Uma médica mediu a pressão arterial sistólica de 96 recém-nascidos em dois momentos: quando tinham entre 12-24 h (A) e quando tinham 24-48 h (B) de vida. Deseja-se testar a hipótese de que a pressão arterial sistólica apresenta valores diferentes nesses dois momentos. Usando $\alpha = 0.001$.

Os dados foram analisados por um programa de computador, que forneceu os seguintes resultados:

Diferenças iguais a zero = 6

Soma das diferenças positivas T+ = 73

Soma das diferenças negativas T- = -17

z = 5.23 (P = 0.000)

Mediana momento A = 67.0

Mediana momento B = 70.5

Conforme foi visto, para um tamanho amostral superior a 25 pode-se usar a distribuição normal para testar a significância de T.

O valor de z_{calc} fornecido pelo programa de computador que realizou os cálculos foi de 5.23, que é muito maior do que 3.29 o valor crítico de z para o valor de significância 0.001.

Portanto, rejeita-se a hipótese de igualdade para os valores dos dois momentos. O valor-P associado a z = 5.23 confirma a decisão, aparecendo no relatório do programa como P = 0.000.

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 6

Existem diversos métodos de estimação do volume de madeira produzido pelas árvores, nomeadamente modelos de estimação baseados no diâmetro basal e modelos de estimação baseados no diâmetro à altura do peito (dap). Pretende-se comparar um método de estimação baseado no diâmetro basal com outro método baseado no dap. Para tal, os volumes (m^3) de madeira dos mesmas 15 pinheiros foram estimados pelos dois métodos:

Basal	1.06	1.08	1.12	0.98	1.05	0.85	1.06	0.87	1.03	1.1	0.95	0.78	1.23	1.04	0.88
Dap	1.12	0.97	1.15	1.07	0.89	0.98	1.13	0.82	1.15	1.25	0.86	0.83	1.05	0.89	1.02

$$H_0 : \mu_d = 0 \qquad\qquad H_1 : \mu_d \neq 0$$

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 6

Basal	1.06	1.08	1.12	0.98	1.05	0.85	1.06	0.87	1.03	1.1	0.95	0.78	1.23	1.04	0.88
Dap	1.12	0.97	1.15	1.07	0.89	0.98	1.13	0.82	1.15	1.25	0.86	0.83	1.05	0.89	1.02

Método: cálculo das somas dos postos

n	α Bilateral α Unilateral	0.50 0.25	0.20 0.10	0.10 0.05	0.05 0.025	0.02 0.01	0.01 0.005	0.005 0.0025	0.001 0.0005
4		2	0						
5		4	2	0					
6		6	3	2	0				
7		9	5	3	2	0			
8		12	8	5	3	1	0		
9		16	10	8	5	3	1	0	
10		20	14	10	8	5	3	1	
11		24	17	13	10	7	5	3	0
12		29	21	17	13	9	7	5	1
13		35	26	21	17	12	9	7	2
14		40	31	25	21	15	12	9	4
15		47	36	30	25	19	15	12	6

Método: cálculo com correção dos empates dos postos

$$Z_{calc} = \frac{\left| T - \frac{n(n+1)}{4} \right|}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \frac{CE}{2}}{24}}}$$

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 6

Basal	1.06	1.08	1.12	0.98	1.05	0.85	1.06	0.87	1.03	1.1	0.95	0.78	1.23	1.04	0.88
Dap	1.12	0.97	1.15	1.07	0.89	0.98	1.13	0.82	1.15	1.25	0.86	0.83	1.05	0.89	1.02

Soma postos	120.0
Soma positivos (T+)	58.5
Soma negativos (T-)	61.5

$T_{calc} = 58.5$

$T_{calc} = 58.5 \quad > \quad T_{0.05;15} = 25$

n	α Bilateral / α Unilateral	0.50 / 0.25	0.20 / 0.10	0.10 / 0.05	0.05 / 0.025	0.02 / 0.01	0.01 / 0.005	0.005 / 0.0025	0.001 / 0.0005
4		2	0						
5		4	2	0					
6		6	3	2	0				
7		9	5	3	2	0			
8		12	8	5	3	1	0		
9		16	10	8	5	3	1	0	
10		20	14	10	8	5	3	1	
11		24	17	13	10	7	5	3	0
12		29	21	17	13	9	7	5	1
13		35	26	21	17	12	9	7	2
14		40	31	25	[illegible]	15	12	9	4
15		47	36	30	25	19	15	12	6

$$Z_{calc} = \frac{\left| T - \frac{n(n+1)}{4} \right|}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \frac{CE}{2}}{24}}}$$

CE = Σ(t3 – t), onde t é o número de empates por posto

Corrigindo pelos empates

μ	60
empates	9
σ^2	309.625
Z =	-0.08525

Para um nível de significância $\alpha = 5\%$, e tratando-se de um teste bilateral, o quantil crítico da distribuição normal $\mathbf{N}(0,1)$ é $\mathbb{Z}_{0.05} = \pm 1.96$, pelo que se conclui que não há evidência estatística para rejeitar a hipótese nula.

Teste pareado de Wilcoxon – Exercício 6

Basal	1.06	1.08	1.12	0.98	1.05	0.85	1.06	0.87	1.03	1.1	0.95	0.78	1.23	1.04	0.88
Dap	1.12	0.97	1.15	1.07	0.89	0.98	1.13	0.82	1.15	1.25	0.86	0.83	1.05	0.89	1.02

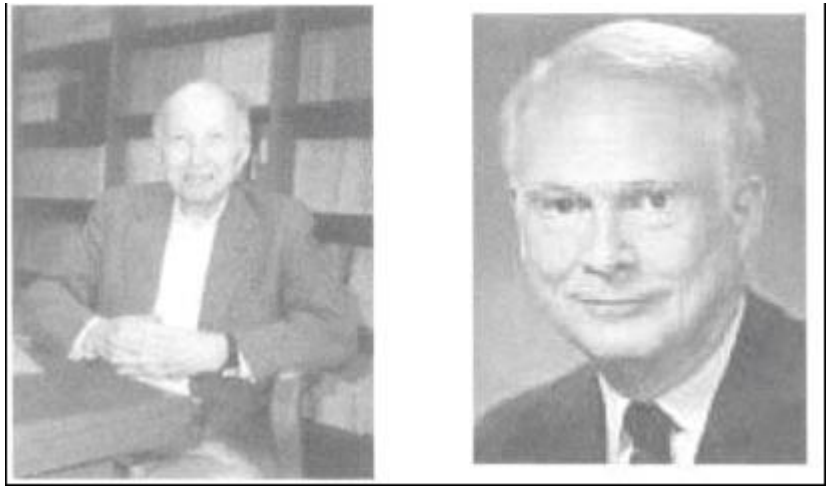
```
> wilcox.test(basal, dap, paired=TRUE, alternative="two.sided")

        Wilcoxon signed rank test

data:  basal and dap
V = 59, p-value = 0.978
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Teste Kruskal-Wallis

Teste Kruskal-Wallis

O teste de Kruskal-Wallis (KW) é uma extensão do teste de Wilcoxon-Mann-Whitney.

É um teste não paramétrico utilizado para comparar três ou mais populações. Ele é usado para testar a hipótese nula de que todas as populações possuem funções de distribuição iguais contra a hipótese alternativa de que ao menos duas das populações possuem funções de distribuição diferentes.



William Henry Kruskal (1919 - 2005) e Wilson Allen Wallis (1912-1998).

Teste Kruskall-Wallis

O teste de Kruskal-Wallis é o análogo ao teste F utilizado na ANOVA 1 fator.

Enquanto a análise de variância dos testes dependem da hipótese de que todas as populações em confronto são independentes e normalmente distribuídas, o teste de Kruskal-Wallis não coloca nenhuma restrição sobre a comparação.

Suponha que os dados provenham de k amostras aleatórias independentes com tamanhos amostrais n1, n2, ..., nk sendo N = n1 + n2 + ... + nk o número total de elementos considerados em todas as amostras.

Amostra 1	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1,n_1}
Amostra 2	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{2,n_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Amostra k-1	$X_{k-1,1}$	$X_{k-1,2}$	$\cdots$	$X_{k-1,n_{k-1}}$
Amostra k	$X_{k,1}$	$X_{k,2}$	$\cdots$	X_{k,n_k}

Teste Kruskal-Wallis

Para aplicar o método de Kruskal-Wallis, primeiramente ordenamos todas as N observações das k amostras da menor para a maior observação e consideramos r_{ij} como sendo o posto de X_{ij}.

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} \quad \text{e} \quad R_{i.} = \frac{R_i}{n_i}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Deste modo, temos por exemplo, que R_1 é a soma dos postos dos elementos da amostra 1 e $R_{i.}$ é o posto médio destas mesmas observações. A estatística de Kruskal-Wallis H, será dada por

$$H = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(R_{i.} - \frac{N+1}{2}\right)^2}{1 - \frac{\sum_{j=1}^{g} t_j^3 - t_j}{N^3 - N}} = \frac{\left(\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1)}{1 - \frac{\sum_{j=1}^{g} t_j^3 - t_j}{N^3 - N}}$$

onde t_j é o tamanho do grupo de elementos repetidos j e g é o número de grupos. Uma observação que não se repete é considerada como um grupo de tamanho 1. Esta estatística tem, aproximadamente, uma distribuição qui-quadrado com k-1 graus de liberdade.

H0 é rejeitada quando $H_{calc} > H_{crítico}$

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

Os dados a seguir são de uma experiência clássica agrícola para avaliar o rendimento de culturas divididas em quatro grupos diferentes. Para manter a simplicidade, identificamos os tratamentos usando os números inteiros {1,2,3,4}. Queremos avaliar se os dados provém de distribuições igualmente distribuídas.

Grupos	Resposta
1	83
1	91
1	94
1	89
1	89
1	96
1	91
1	92
1	90
1	84
2	91
2	90
2	81
2	83
2	84
2	83
2	88
2	91
2	89
3	101
3	100
3	91
3	93
3	96
3	95
3	94
3	81
4	78
4	82
4	81
4	77
4	79
4	81
4	80

1. Estabelecemos as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_k \\ H_1 : \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \text{ não são todos iguais} \end{cases}$$

2. A partir dos dados da tabela, relacionando os postos de cada elemento, os tamanhos amostrais de cada grupo e os valores R_i para cada grupo:

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

j	r1j	r2j	r3j	r4j
1	11	6.5	6.5	1
2	13.5	11	23	2
3	17	11	27	3
4	17	13.5	28.5	4
5	19.5	15	30	6.5
6	23	17	31.5	6.5
7	23	19.5	33	9
8	26	23	34	
9	28.5	23		
10	31.5			
Ri	210	139.5	213.5	32
N	34	34	34	34
ni	10	9	8	7

Grupos	Resposta
1	83
1	91
1	94
1	89
1	89
1	96
1	91
1	92
1	90
1	84
2	91
2	90
2	81
2	83
2	84
2	83
2	88
2	91
2	89
3	101
3	100
3	91
3	93
3	96
3	95
3	94
3	81
4	78
4	82
4	81
4	77
4	79
4	81
4	80

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

3. Cálculo da estatística H.

$$H = \frac{\left(\frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1)}{1 - \frac{\sum_{j=1}^{g} t_j^3 - t_j}{N^3 - N}} =$$

$$= \frac{0,010084034 * (122,5 + 36 + 675,28125 + 1170,035714)}{1 - 0,006417112} =$$

$$= 20,337.$$

4. Cálculo dos valores críticos.

Fixando o nível de significância α = 0.05 e sabendo que k = 4, temos que o valor crítico corresponde ao ponto $Q_{0,95}$ = 9.48.

5. Critério de rejeição.

Como H_{obs} = 20.337 > $Q_{0,95}$ = 9.48, rejeitamos a hipótese nula.

Grupos	Resposta
1	83
1	91
1	94
1	89
1	89
1	96
1	91
1	92
1	90
1	84
2	91
2	90
2	81
2	83
2	84
2	83
2	88
2	91
2	89
3	101
3	100
3	91
3	93
3	96
3	95
3	94
3	81
4	78
4	82
4	81
4	77
4	79
4	81
4	80

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750

Grupos	Resposta
1	83
1	91
1	94
1	89
1	89
1	96
1	91
1	92
1	90
1	84
2	91
2	90
2	81
2	83
2	84
2	83
2	88
2	91
2	89
3	101
3	100
3	91
3	93
3	96
3	95
3	94
3	81
4	78
4	82
4	81
4	77
4	79
4	81
4	80

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

6. Neste caso, o p-valor é dado por

$$P - valor = P[\chi^2_{k-1} \geq H_{obs}] = P[\chi^2_3 \geq 20,337] = 0,0001445.$$

Via tabela normal: < 0.005

TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750

Quanto maior o valor de X^2 para GL=3, menor a probabilidade

Grupos	Resposta
1	83
1	91
1	94
1	89
1	89
1	96
1	91
1	92
1	90
1	84
2	91
2	90
2	81
2	83
2	84
2	83
2	88
2	91
2	89
3	101
3	100
3	91
3	93
3	96
3	95
3	94
3	81
4	78
4	82
4	81
4	77
4	79
4	81
4	80

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

$$P - valor = P[\chi^2_{k-1} \geq H_{obs}] = P[\chi^2_3 \geq 20,337] = 0,0001445.$$

```
> kruskal.test(resposta~grupo,dados)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  resposta by grupo
Kruskal-Wallis chi-squared = 20.3371, df = 3, p-value = 0.0001445
```

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

Valores críticos para distribuição de Kruskal-Wallis

n_1	n_2	n_3	α 0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
2	2	2	4,571						
3	2	1	4,286						
3	2	2	4,500	4,714					
3	3	1	4,571	5,143					
3	3	2	4,556	5,361	6,250				
3	3	3	4,622	5,600	6,489	(7,200)	7,200		
4	2	1	4,500						
4	2	2	4,458	5,333	6,000				
4	3	1	4,056	5,208					
4	3	2	4,511	5,444	6,144	6,444	7,000		
4	3	3	4,709	5,791	6,564	6,745	7,318	8,018	
4	4	1	4,167	4,967	(6,667)	6,667			
4	4	2	4,555	5,455	6,600	7,036	7,282	7,855	
4	4	3	4,545	5,598	6,712	7,144	7,598	8,227	8,909
4	4	4	4,654	5,692	6,962	7,654	8,000	8,654	9,269
5	2	1	4,200	5,000					
5	2	2	4,373	5,160	6,000	6,533			
5	3	1	4,018	4,960	6,044				
5	3	2	4,651	5,251	6,124	6,909	7,182		
5	3	3	4,533	5,648	6,533	7,079	7,636	8,048	8,727
5	4	1	3,987	4,985	6,431	6,955	7,364		
5	4	2	4,541	5,273	6,505	7,205	7,573	8,114	8,591
5	4	3	4,549	5,656	6,676	7,445	7,927	8,481	8,795
5	4	4	4,619	5,657	6,953	7,760	8,189	8,868	9,168
5	5	1	4,109	5,127	6,145	7,309	8,182		
5	5	2	4,623	5,338	6,446	7,338	8,131	8,446	7,338
5	5	3	4,545	5,705	6,866	7,578	8,316	8,809	9,521
5	5	4	4,523	5,666	7,000	7,823	8,523	9,163	9,606
5	5	5	4,940	5,780	7,220	8,000	8,780	9,620	9,920
6	1	1	—						
6	2	1	4,200	4,822					
6	2	2	4,545	5,345	6,182	6,982			
6	3	1	3,909	4,855	6,236				
6	3	2	4,682	5,348	6,227	6,970	7,515	8,182	
6	3	3	4,538	5,615	6,590	7,410	7,872	8,628	9,346
6	4	1	4,038	4,947	6,174	7,106	7,614		
6	4	2	4,494	5,340	6,571	7,340	7,846	8,494	8,827
6	4	3	4,604	5,610	6,725	7,500	8,033	8,918	9,170
6	4	4	4,595	5,681	6,900	7,795	8,381	9,167	9,861
6	5	1	4,128	4,990	6,138	7,182	8,077	8,515	
6	5	2	4,596	5,338	6,585	7,376	8,196	8,967	9,189
6	5	3	4,535	5,602	6,829	7,590	8,314	9,150	9,669
6	5	4	4,522	5,661	7,018	7,936	8,643	9,458	9,960
6	5	5	4,547	5,729	7,110	8,028	8,859	9,771	10,271
6	6	1	4,000	4,945	6,286	7,121	8,165	9,077	9,692
6	6	2	4,438	5,410	6,667	7,467	8,210	9,219	9,752
6	6	3	4,558	5,625	6,900	7,725	8,458	9,458	10,150
6	6	4	4,548	5,724	7,107	8,000	8,754	9,662	10,342
6	6	5	4,542	5,765	7,152	8,124	8,987	9,948	10,524
6	6	6	4,643	5,801	7,240	8,222	9,170	10,187	10,889
7	7	7	4,594	5,819	7,332	8,378	9,373	10,516	11,310
8	8	8	4,595	5,805	7,355	8,465	9,495	10,805	11,705
2	2	1 1	—						
2	2	2 1	5,357	5,679					
2	2	2 2	5,667	6,167	(6,667)	6,667			
3	1	1 1	—						
3	2	1 1	5,143						
3	2	2 1	5,556	5,833	6,500				

n_1	n_2	n_3	α 0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
3	2	2 2	5,544	6,333	6,978	7,133	7,533		
3	3	1 1	5,333	6,333					
3	3	2 1	5,689	6,244	6,689	7,200	7,400		
3	3	2 2	5,745	6,527	7,182	7,636	7,873	8,018	8,455
3	3	3 1	5,655	6,600	7,109	7,400	8,055	8,345	
3	3	3 2	5,879	6,727	7,636	8,105	8,379	8,803	9,030
3	3	3 3	6,026	7,000	7,872	8,538	8,897	9,462	9,513
4	1	1 1	—						
4	2	1 1	5,250	5,833					
4	2	2 1	5,533	6,133	6,667	7,000			
4	2	2 2	5,755	6,545	7,091	7,391	7,964	8,291	
4	3	1 1	5,067	6,178	6,711	7,067			
4	3	2 1	5,591	6,309	7,018	7,455	7,773	8,182	
4	3	2 2	5,750	6,621	7,530	7,871	8,273	8,689	8,909
4	3	3 1	5,589	6,545	7,485	7,758	8,212	8,697	9,182
4	3	3 2	5,872	6,795	7,763	8,333	8,718	9,167	9,455
4	3	3 3	6,016	6,984	7,995	8,659	9,253	9,709	10,016
4	4	1 1	5,182	5,945	7,091	7,909	7,909		
4	4	2 1	5,568	6,386	7,364	7,886	8,341	8,591	8,909
4	4	2 2	5,808	6,731	7,750	8,346	8,692	9,269	9,462
4	4	3 1	5,692	6,635	7,660	8,231	8,583	9,038	9,327
4	4	3 2	5,901	6,874	7,951	8,621	9,165	9,615	9,945
4	4	3 3	6,019	7,038	8,181	8,876	9,495	10,105	10,467
4	4	4 1	5,564	6,725	7,879	8,588	9,000	9,478	9,758
4	4	4 2	5,914	6,957	8,157	8,871	9,486	10,043	10,429
4	4	4 3	6,042	7,142	8,350	9,075	9,742	10,542	10,929
4	4	4 4	6,088	7,235	8,515	9,287	9,971	10,809	11,338
2	1	1 1 1	—						
2	2	1 1 1	5,786						
2	2	2 1 1	6,250	6,750					
2	2	2 2 1	6,600	7,133	(7,533)	7,533			
2	2	2 2 2	6,982	7,418	8,073	8,291	(8,727)	8,727	
3	1	1 1 1	—						
3	2	1 1 1	6,139	6,583					
3	2	2 1 1	6,511	6,800	7,400	7,600			
3	2	2 2 1	6,709	7,309	7,836	8,127	8,327	8,618	
3	2	2 2 2	6,955	7,682	8,303	8,682	8,985	9,273	9,364
3	3	1 1 1	6,311	7,111	7,467				
3	3	2 1 1	6,600	7,200	7,892	8,073	8,345		
3	3	2 2 1	6,788	7,591	8,258	8,576	8,924	9,167	9,303
3	3	2 2 2	7,026	7,910	8,667	9,115	9,474	9,769	10,026
3	3	3 1 1	6,788	6,576	8,242	8,424	8,848	(9,455)	9,455
3	3	3 2 1	6,910	7,769	8,590	9,051	9,410	9,769	9,974
3	3	3 2 2	7,121	8,044	9,011	9,505	9,890	10,330	10,637
3	3	3 3 1	7,077	8,000	8,879	9,451	9,846	10,286	10,549
3	3	3 3 2	7,210	8,200	9,267	9,876	10,333	10,838	11,171
3	3	3 3 3	7,333	8,333	9,467	10,200	10,733	10,267	11,667

Fonte: Zar, 1999, pp. 104-105.

Teste Kruskal-Wallis

Quando rejeitamos a hipótese nula H0 no teste de Kruskal-Wallis, indica que ao menos um dos grupos é diferente dos demais.

Porém, não temos a informação de quais são diferentes. Neste sentido, um procedimento de comparações múltiplas nos permite determinar quais grupos são diferentes.

Suponha que a hipótese de não haver diferença entre os *k* grupos foi testada e rejeitada ao nível de significância α.

$$|R_{i.} - R_{j.}| \geq Z_{\left(\frac{\alpha}{k(k-1)}\right)} \sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Teste Kruskal-Wallis

$$|R_{i.} - R_{j.}| \geq Z_{\left(\frac{\alpha}{k(k-1)}\right)} \sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

n_i e n_j são os tamanhos da amostra dos grupos i e j respectivamente;

$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ o número total de elementos considerados em todas as amostras;

$R_{i.}$ e $R_{j.}$ é o efeito dos postos (ranks) dos grupos i e j respectivamente;

$|R_{i.} - R_{j.}|$ é a diferença observada;

$Z_{\left(\frac{\alpha}{k(k-1)}\right)} \sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$ é a diferença crítica.

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

No procedimento de comparações múltiplas, vamos seguir os seguintes passos:

1. Calcular as diferenças observadas.

j	r1j	r2j	r3j	r4j
1	11	6.5	6.5	1
2	13.5	11	23	2
3	17	11	27	3
4	17	13.5	28.5	4
5	19.5	15	30	6.5
6	23	17	31.5	6.5
7	23	19.5	33	9
8	26	23	34	
9	28.5	23		
10	31.5			
Ri	210	139.5	213.5	32
N	34	34	34	34
ni	10	9	8	7
RiM	21	15.5	26.69	4.57

→ Média simples

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

No procedimento de comparações múltiplas, vamos seguir os seguintes passos:

1. Calcular as diferenças observadas.

	1	2	3	4
RiM	21	15.5	26.69	4.57

Comparação	$\overline{R}_{i.}$	$\overline{R}_{j.}$	$\lvert\overline{R}_{i.} - \overline{R}_{j.}\rvert$
1 - 2	21	15,5	5,5
1 - 3	21	26,6875	5,6875
1 - 4	21	4,571429	16,42857143
2 - 3	15,5	26,6875	11,1875
2 - 4	15,5	4,571429	10,92857143
3 - 4	26,6875	4,571429	22,11607143

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

2. Consultar o valor de Z na tabela dos valores críticos da distribuição Q para testes de comparações múltiplas não paramétricos.

$$Z_{\left(\frac{\alpha}{k(k-1)}\right)} = Z_{\left(\frac{0,05}{4(4-1)}\right)} = 2,638257$$

k	α 0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
2	0,674	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	2,807	3,091	3,291
3	1,383	1,834	2,128	2,394	2,713	2,936	3,144	3,403	3,588
4	1,732	2,128	2,394	2,639	2,936	3,144	3,342	3,588	3,765
5	1,960	2,327	2,576	2,807	3,091	3,291	3,481	3,719	3,891
6	2,128	2,475	2,713	2,936	3,209	3,403	3,588	3,820	3,988
7	2,261	2,593	2,823	3,038	3,304	3,494	3,675	3,902	4,067
8	2,369	2,690	2,914	3,124	3,384	3,570	3,748	3,972	4,134
9	2,461	2,773	2,992	3,197	3,453	3,635	3,810	4,031	4,191
10	2,540	2,845	3,059	3,261	3,512	3,692	3,865	4,083	4,241
11	2,609	2,908	3,119	3,317	3,565	3,743	3,914	4,129	4,286
12	2,671	2,965	3,172	3,368	3,613	3,789	3,957	4,171	4,326
13	2,726	3,016	3,220	3,414	3,656	3,830	3,997	4,209	4,363
14	2,777	3,062	3,264	3,456	3,695	3,868	4,034	4,244	4,397
15	2,823	3,105	3,304	3,494	3,731	3,902	4,067	4,276	4,428
16	2,866	3,144	3,342	3,529	3,765	3,935	4,098	4,305	4,456
17	2,905	3,181	3,376	3,562	3,796	3,965	4,127	4,333	4,483
18	2,942	3,215	3,409	3,593	3,825	3,993	4,154	4,359	4,508
19	2,976	3,246	3,439	3,622	3,852	4,019	4,179	4,383	4,532
20	3,008	3,276	3,467	3,649	3,878	4,044	4,203	4,406	4,554
21	3,038	3,304	3,494	3,675	3,902	4,067	4,226	4,428	4,575
22	3,067	3,331	3,519	3,699	3,925	4,089	4,247	4,448	4,595
23	3,094	3,356	3,543	3,722	3,947	4,110	4,268	4,468	4,614
24	3,120	3,380	3,566	3,744	3,968	4,130	4,287	4,486	4,632
25	3,144	3,403	3,588	3,765	3,988	4,149	4,305	4,504	4,649

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

3. Calcular as diferenças críticas.

Comparação	$Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}})$	$\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$	Diferença Crítica
1 - 2	2,638257	4,575498	12,07134
1 - 3	2,638257	4,723611	12,4621
1 - 4	2,638257	4,907477	12,94719
2 - 3	2,638257	4,838838	12,7661
2 - 4	2,638257	5,018484	13,24005
3 - 4	2,638257	5,153882	13,59727

$$\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 7

4. Decisão: **Se diferença observada > diferença crítica = há diferença significativa**

Fatores Comparados	*Diferença Observada*	*Diferença Crítica*	*Diferença*
1 - 2	5,5	12,07134181	Não
1 - 3	5,6875	12,46210083	Não
1 - 4	16,42857143	12,94718765	Sim
2 - 3	11,1875	12,76609918	Não
2 - 4	10,92857143	13,24005284	Não
3 - 4	22,11607143	13,59726676	Sim

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 8

Considere os seguintes 3 tratamentos, A, B, C, cada um com 7 repetições. Pretende-se averiguar se três tratamentos conduzem a resultados iguais, isto é:

H0: Os três tratamentos têm a mesma distribuição;
H1: Os três tratamentos não têm a mesma distribuição.

Tratamento A	Tratamento B	Tratamento C
9	11	18
13	13	13
11	12	12
10	15	16
9	8	10
14	12	16
10	12	15

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 8

Considere os seguintes 3 tratamentos, A, B, C, cada um com 7 repetições. Pretende-se averiguar se três tratamentos conduzem a resultados iguais, isto é:

Tratamento A	Tratamento B	Tratamento C
9	11	18
13	13	13
11	12	12
10	15	16
9	8	10
14	12	16
10	12	15

Passos:

1. Juntar e ranquear
2. Calcular partes da fórmula individualmente

$$H = \frac{\left(\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1)}{1 - \frac{\sum_{j=1}^{g} t_j^3 - t_j}{N^3 - N}}$$

N = número total de amostras
ni = número de amostras por tratamento
Ri = soma dos postos de cada amostra
t = número de empates por posto

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 8

Significância do teste baseado no valor de H, graus de liberdade e α.

TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,042	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,257	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,954	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	118,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 8

	Tratamento A	Tratamento B	Tratamento C	
	2.5	1	5	
	2.5	7.5	10.5	
	5	10.5	14	
	5	10.5	17.5	
	7.5	10.5	19.5	
	14	14	19.5	
	16	17.5	21	
soma	52.5	71.5	107	
N	21	21	21	
Ni	7	7	7	21
soma^2/n	393.75	730.3214286	1635.571429	2759.643
	superior	5.67903525		
	inferior	0.985714286		
	H =	5.7613		
	GL	2		
	P	0.0561		
	α	0.05		
	sig?	Não		

```
> kruskal.test(resposta2~grupo2,dados2)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  resposta2 by grupo2
Kruskal-Wallis chi-squared = 5.7613, df = 2, p-value = 0.0561
```

=DIST.QUIQUA.CD(C28;C29)

DIST.QUIQUA.CD(x;graus_liberdade)
Retorna a probabilidade de cauda direita da distribuição qui-quadrada.

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 8

	Tratamento A	Tratamento B	Tratamento C	
	2.5	1	5	
	2.5	7.5	10.5	
	5	10.5	14	
	5	10.5	17.5	
	7.5	10.5	19.5	
	14	14	19.5	
	16	17.5	21	
soma	52.5	71.5	107	
N	21	21	21	
Ni	7	7	7	21
soma^2/n	393.75	730.3214286	1635.571429	2759.643
	superior	5.67903525		
	inferior	0.985714286		
	H =	5.7613		
	GL	2		
	P	0.0561		
	α	0.05		
	sig?	Não		

TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,042	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,257	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,954	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	118,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 8

	Tratamento A	Tratamento B	Tratamento C	
	2.5	1	5	
	2.5	7.5	10.5	
	5	10.5	14	
	5	10.5	17.5	
	7.5	10.5	19.5	
	14	14	19.5	
	16	17.5	21	
soma	52.5	71.5	107	
N	21	21	21	
Ni	7	7	7	21
soma^2/n	393.75	730.3214286	1635.571429	2759.643
	superior	5.67903525		
	inferior	0.985714286		
	H =	5.7613		
	GL	2		
	P	0.0561		
	α	0.05		
	sig?	Não		

Valores críticos de Kruskal-Wallis

			α 0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
6	2	1	4,200	4,622					
6	2	2	4,545	5,345	6,182	6,982			
6	3	1	3,909	4,855	6,236				
6	3	2	4,682	5,348	6,227	6,970	7,515	8,182	
6	3	3	4,538	5,615	6,590	7,410	7,872	8,628	9,346
6	4	1	4,038	4,947	6,174	7,106	7,614		
6	4	2	4,494	5,340	6,571	7,340	7,846	8,494	8,827
6	4	3	4,604	5,610	6,725	7,500	8,033	8,918	9,170
6	4	4	4,595	5,681	6,900	7,795	8,381	9,167	9,861
6	5	1	4,128	4,990	6,138	7,182	8,077	8,515	
6	5	2	4,596	5,338	6,585	7,376	8,196	8,967	9,189
6	5	3	4,535	5,602	6,829	7,590	8,314	9,150	9,669
6	5	4	4,522	5,661	7,018	7,936	8,643	9,458	9,960
6	5	5	4,547	5,729	7,110	8,028	8,859	9,771	10,271
6	6	1	4,000	4,945	6,286	7,121	8,165	9,077	9,692
6	6	2	4,438	5,410	6,667	7,467	8,210	9,219	9,752
6	6	3	4,558	5,625	6,900	7,725	8,458	9,458	10,150
6	6	4	4,548	5,724	7,107	8,000	8,754	9,662	10,342
6	6	5	4,542	5,765	7,152	8,124	8,987	9,948	10,524
6	6	6	4,643	5,801	7,240	8,222	9,170	10,187	10,889
7	7	7	4,594	5,819	7,332	8,378	9,373	10,516	11,310
8	8	8	4,595	5,805	7,355	8,465	9,495	10,805	11,705

$H_{calc} < H_{tabelado}$ = aceita Ho

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 9

Uma empresa de cosméticos criou um pequeno ensaio de um novo creme para o tratamento de manchas da pele. É medida a eficácia do novo creme em comparação com o creme preeminente no mercado e um placebo. Trinta pessoas foram classificadas em três grupos de 10 pessoas aleatórias, embora pouco antes do início da amostragem duas pessoas do grupo de controle e uma pessoa do grupo de teste para o creme desistiram. A tabela mostra o número de manchas removidas de cada pessoa durante o ensaio.

Novo	Velho	Controle
46	44	26
32	31	49
42	25	33
45	22	19
37	30	31
44	30	38
38	32	44
47	19	50
49	40	
41		

$$H = \frac{\left(\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1)}{1 - \frac{\sum_{j=1}^{g} t_j^3 - t_j}{N^3 - N}}$$

N = número total de amostras
ni = número de amostras por tratamento
Ri = soma dos postos de cada amostra
t = número de empates por posto

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 9

	Novo	Velho	Controle	
	10.5	1.5	1.5	
	13	3	5	
	14.5	4	8.5	
	17	6.5	12	
	18	6.5	14.5	
	20	8.5	20	
	22	10.5	25.5	
	23	16	27	
	24	20		
	25.5			
soma	187.5	76.5	114	
n	10	9	8	27
soma^2/n	3515.63	650.25	1624.50	5790.38

sup	7.910714
inf	0.996947

H =	7.934936
GL	2
P	0.018921
α	0.05
sig?	sim

Uma vez que o valor p = 0.018921 < 0.05, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que há diferença significativa entre os três cosméticos.

```
> kruskal.test(resposta1~grupo1,dados1)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  resposta1 by grupo1
Kruskal-Wallis chi-squared = 7.9349, df = 2, p-value = 0.01892
```

TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 9

	Novo	Velho	Controle	
	10.5	1.5	1.5	
	13	3	5	
	14.5	4	8.5	
	17	6.5	12	
	18	6.5	14.5	
	20	8.5	20	
	22	10.5	25.5	
	23	16	27	
	24	20		
	25.5			
soma	187.5	76.5	114	
n	10	9	8	27
soma^2/n	3515.63	650.25	1624.50	5790.38

sup	7.910714
inf	0.996947

H =	7.934936
GL	2
P	0.018921
α	0.05
sig?	sim

Uma vez que o valor p = 0.018921 < 0.05, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que há diferença significativa entre os três cosméticos.

```
> kruskal.test(resposta1~grupo1,dados1)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  resposta1 by grupo1
Kruskal-Wallis chi-squared = 7.9349, df = 2, p-value = 0.01892
```

TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 10

Num estudo de limnologia mediu-se o pH de oito amostras de água de cada uma de quatro barragens. Os valores são os seguintes:

Barragem 1	Barragem 2	Barragem 3	Barragem 4
7.68	7.71	7.74	7.71
7.69	7.73	7.75	7.71
7.70	7.74	7.77	7.74
7.70	7.74	7.78	7.79
7.72	7.78	7.80	7.81
7.73	7.78	7.81	7.85
7.73	7.80	7.84	7.87
7.76	7.81	7.86	7.91

Pretende-se averiguar se as águas das quatro origens têm o mesmo valor de pH, isto é:

H_0 : O valor do pH da água é o mesmo nas 4 barragens;

H_1 : O valor do pH da água não é o mesmo nas 4 barragens.

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 10

	B1	B2	B3	B4	
	1	6	13.5	6	
	2	10	16	6	
	3.5	13.5	18	13.5	
	3.5	13.5	20	22	
	8	20	23.5	26	
	10	20	26	29	
	10	23.5	28	31	
	17	26	30	32	
soma	55	132.5	175	165.5	528
n	8	8	8	8	32
soma^2/n	378.125	2194.531	3828.125	3423.781	9824.563

sup	12.642756
inf	0.994868

H =	12.707973
GL	2
P	0.00173980
α	0.05
sig?	sim

```
> kruskal.test(ph~barragens,dados3)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  ph by barragens
Kruskal-Wallis chi-squared = 12.708, df = 3, p-value = 0.005313
```

Para um nível de significância $\alpha = 5\%$ e para $\upsilon = k - 1 = 4 - 1 = 3$ graus de liberdade, e fazendo a aproximação à distribuição χ^2, o valor crítico é $\chi^2_{(0.05;3)} = 7.815$; como $H_c = 12.7076 > \chi^2_{(0.05;3)} = 7.815$, deve rejeitar-se a hipótese nula.

Teste Kruskal-Wallis – Exercício 10

$$H_c = 12.7076 > \chi^2_{(0.05;3)} = 7.815$$

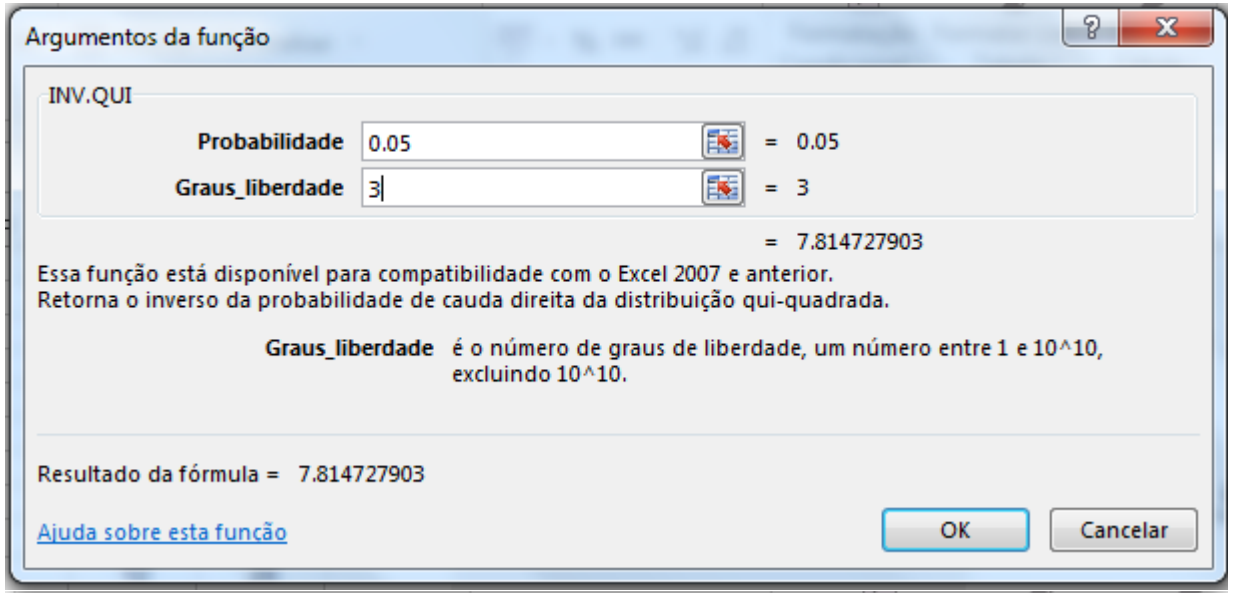
TABELA A-4 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Graus de Liberdade	Área à Direita do Valor Crítico									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	—	—	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278

Extras

Para achar o valor tabelado:

Funções INV.



Para achar a probabilidade:

Funções DIST.